

Barem clasa a IX-a
(OLM 2015-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I. (20 puncte)

Aplicând inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwartz, avem

$$\left(\sqrt{a_1+2} \cdot 1 + \sqrt{a_2+6} \cdot 1 + \dots + \sqrt{a_n+n \cdot (n+1)} \cdot 1\right)^2 < (1+1+\dots+1) \cdot (a_1+2+a_2+6+\dots+a_n+n \cdot (n+1))$$

$$< n \cdot (a_1+a_2+\dots+a_n+1 \cdot 2+2 \cdot 3+\dots+n \cdot (n+1)) \quad (1)$$

(10 p)

Se demonstrează prin inducție matematică că $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$.

(5 p)

Înlocuind în relația (1) se obține inegalitatea cerută.

(5 p)

Subiectul II. (30 puncte)

Se arată că A,B,C mijloacele segmentelor NM, NP respective MP, deci

$$\vec{r}_A = \frac{1}{2}(\vec{r}_M + \vec{r}_N), \vec{r}_B = \frac{1}{2}(\vec{r}_P + \vec{r}_N) \text{ și } \vec{r}_C = \frac{1}{2}(\vec{r}_M + \vec{r}_P)$$

(10 p)

$$G_1 \text{ centrul de greutate al triunghiului BCP} \Rightarrow \vec{r}_{G_1} = \frac{1}{3}(\vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_P)$$

$$G_2 \text{ centrul de greutate al triunghiului ACM} \Rightarrow \vec{r}_{G_2} = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_C + \vec{r}_M)$$

$$G_3 \text{ centrul de greutate al triunghiului ABN} \Rightarrow \vec{r}_{G_3} = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_N)$$

Se observă că $\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C = \vec{r}_M + \vec{r}_N + \vec{r}_P = \vec{r}_{G_1} + \vec{r}_{G_2} + \vec{r}_{G_3}$

(10 p)

Din $\vec{AG}_1 = \vec{r}_{G_1} - \vec{r}_A$, $\vec{BG}_2 = \vec{r}_{G_2} - \vec{r}_B$ și $\vec{CG}_3 = \vec{r}_{G_3} - \vec{r}_C$ rezultă că $\vec{AG}_1 + \vec{BG}_2 + \vec{CG}_3 = \vec{r}_{G_1} + \vec{r}_{G_2} + \vec{r}_{G_3} - (\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C) = \vec{0}$,

deci cu vectorii \vec{AG}_1, \vec{BG}_2 și \vec{CG}_3 se poate construi un triunghi.

(10 p)

Subiectul III. (25 puncte)

a) Teorema bisectoarei ne permite să scriem :

$$(b+c) \cdot \vec{AD} = b \cdot \vec{AB} + c \cdot \vec{AC}, \quad (1)$$

$$(a+c) \cdot \vec{BE} = a \cdot \vec{BA} + c \cdot \vec{BC}, \quad (2)$$

(20 p)

$$(a+b) \cdot \vec{CF} = a \cdot \vec{CA} + b \cdot \vec{CB}. \quad (3)$$

Înmulțind relația (1) cu a , relația (2) cu b și relația (3) cu c și apoi însumând egalitățile obținute, găsim :

$$a(b+c) \cdot \vec{AD} + b(a+c) \cdot \vec{BE} + c(a+b) \cdot \vec{CF} = \vec{0}.$$

(5 p)

Subiectul IV. (15 puncte)

$$a_k = \sqrt{(k^2 - k - 2)(k^2 + 7k + 10) + 36} = \sqrt{(k-2)(k+1)(k+2)(k+5) + 36} =$$

$$= \sqrt{(k^2 + 3k - 10)(k^2 + 3k + 2) + 36}$$

$$\text{Notăm } k^2 + 3k - 10 = t \Rightarrow a_t = \sqrt{t(t+12) + 36} = t + 6$$

$$\text{Deci } a_k = k^2 + 3k - 4$$

(10 p)

$$\text{Pentru } k = 1 \text{ avem } \lfloor \sqrt{a_1} \rfloor = 0, \text{ pentru } k \in \{2, 3, 4\} \text{ avem } \lfloor \sqrt{a_k} \rfloor = k.$$

$$\text{Pentru } k \geq 5 \Rightarrow k+1 \leq \sqrt{k^2 + 3k - 4} < k+2 \Rightarrow \lfloor \sqrt{a_k} \rfloor = k+1.$$

$$\text{Obținem } 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + \dots + n + 1 = 490 \Leftrightarrow (n+1)(n+2) = 992 \Rightarrow n = 30$$

(5 p)